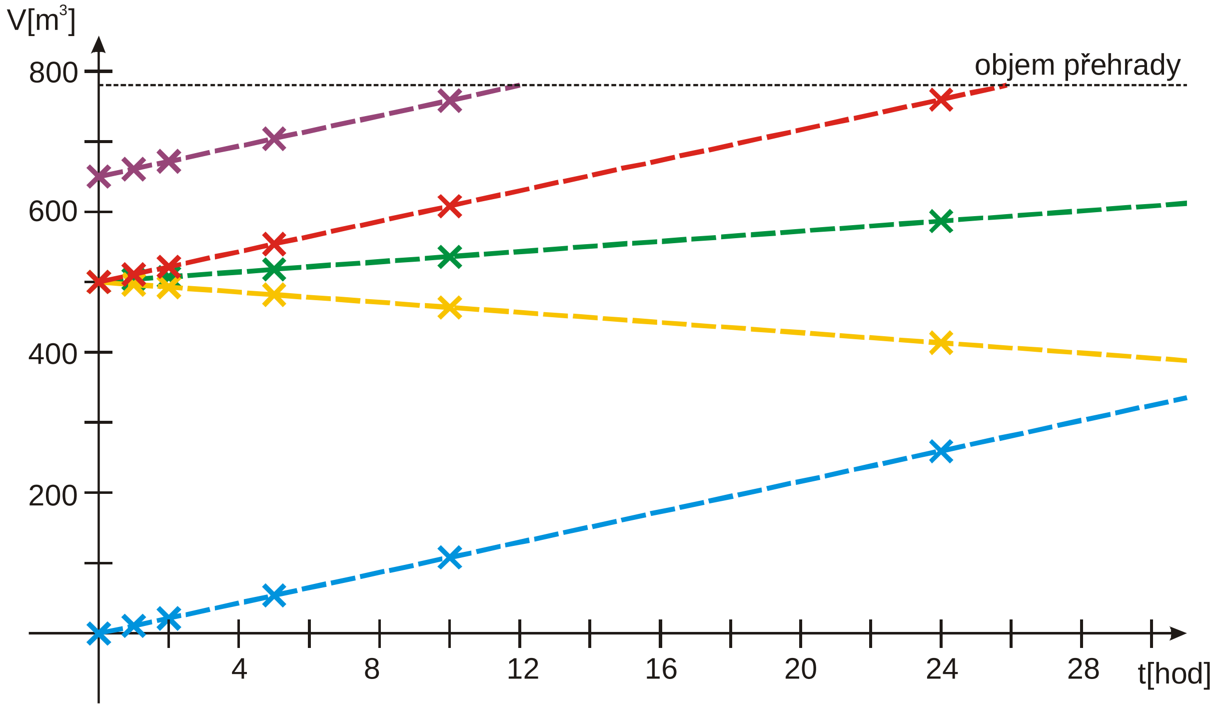
2.1.9 Lineární funkce II

Předpoklady: 2108

Pedagogická poznámka: Je třeba postupovat tak, aby na příklad 6, kde se poprvé kreslí grafy lineárních funkcí, zbylo minimálně 10 minut.

Př. 1: Přiřaď k jednotlivým čarám na obrázku jednotlivé varianty zadání příkladu o Orlické přehradě:
a) původní zadání (přítok $4000\ m^3/s$, odtok je $1000\ m^3/s$, 500 mil m^3),
b) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná,
c) přítok do nádrže je pouze $2000\ m^3/s$,
d) přítok do nádrže je pouze $1000\ m^3/s$, odtok je $2000\ m^3/s$,
e) na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3.
Ke každé z čar napiš její funkční předpis.



a) původní zadání (přítok $4000\ m^3/s$, odtok je $1000\ m^3/s$, 500 mil m^3) – červená čára.
b) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná – modrá čára.
c) přítok do nádrže je pouze $2000\ m^3/s$ - zelená čára.
d) přítok do nádrže je pouze $1000\ m^3/s$, odtok je $2000\ m^3/s$ - žlutá čára.
e) na začátku povodně bylo v přehradě 650 mil m^3 - fialová čára.
podrobnosti v minulé hodině 2108.

Pedagogická poznámka: Pokud řešíte příklad ve třídě, je dobré si nad obrázkem pořádně popovídat a pokusit se najít co nejvíce důvodů pro vytvoření dvojic zadání-čára.

Co mají všechny funkce společné?

- grafem je část přímky.
- předpis má tvar $y = ax + b$.

$\Rightarrow$ takovým funkcím se říká **lineární** (latinsky se čára řekne linea).

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

Př. 2: Najdi nejrychlejší možný způsob zakreslení grafu libovolné lineární funkce.

Graf lineární funkce je přímka $\Rightarrow$ na nakreslení grafu lineární funkce stačí určit libovolné dva body a spojit je přímkou.

Př. 3: Urči hodnoty parametrů *a*, *b* u všech předchozích lineárních funkcí.

a) původní zadání:
$y = 10,8x + 500 \Rightarrow a = 10,8,\ b = 500$

b) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná
$y = 10,8x \Rightarrow a = 10,8,\ b = 0$

c) přítok do nádrže je pouze $2000\ \mathrm{m^3/s}$.
$y = 3,6x + 500 \Rightarrow a = 3,6,\ b = 500$

d) přítok do nádrže je pouze $1000\ \mathrm{m^3/s}$, odtok je $2000\ \mathrm{m^3/s}$.
$y = -3,6x + 500 \Rightarrow a = -3,6,\ b = 500$

e) na začátku povodně bylo v přehradě $650\ \mathrm{mil\ m^3}$
$y = 650 + 10,8x \Rightarrow a = 10,8,\ b = 650$

Pedagogická poznámka: Pokud se zdá, že studentům předchozí příklad nečiní potíže, příliš se u něj nezdržujeme a řešíme ho pouze slovně.

Speciální případy lineární funkce:

- $a = 0 \Rightarrow y = 0x + b = b$ - **konstantní funkce**
  předpis neobsahuje neznámou *x* $\Rightarrow$ pro všechna *x* má funkce stejnou hodnotu *b* (hodnota je neměnná – konstantní),
  graf je vodorovná přímka.
- $b = 0 \Rightarrow y = ax + 0 = ax$ - **přímá úměrnost**
  graf je přímka procházející počátkem (bodem $[0,0]$).

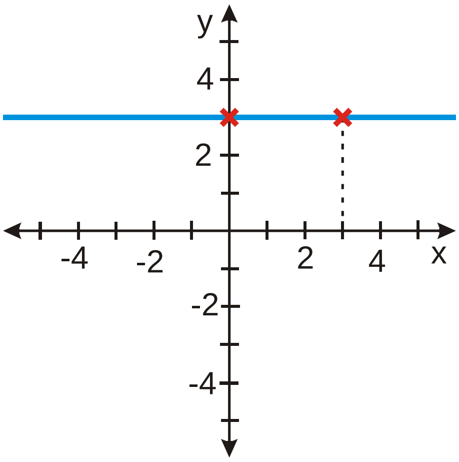
Př. 4: Rozhodni, zda některé z lineárních funkcí, které popisovaly množství vody v přehradě, patří mezi konstantní funkce nebo přímé úměrnosti.

Žádná ze zadaných funkcí mezi konstantní nepatří, u všech se měnilo množství vody v nádrži. Konstantní by byla funkce v případě, že by do přehrady vtékalo a z ní vytékalo stejné množství vody.

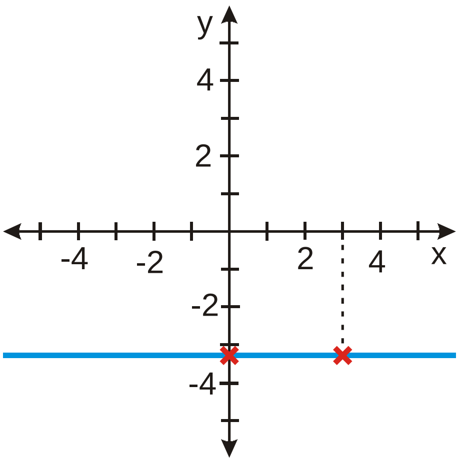
Přímou úměrností je příklad **a) na začátku povodně je nádrž zcela prázdná.**

Př. 5: Nakresli grafy funkcí:
a) $y = 3$, b) $y = -\pi$, c) $y = 2x$, d) $y = -0,5x$.
Pomocí nakreslených grafů ověř, zda platí tvrzení:
1) grafem konstantní funkce je vodorovná přímka,
2) grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem.
Obě tvrzení zdůvodni i úvahou.

a) $y = 3 \Rightarrow$ body $[0;3]$, $[3;3]$

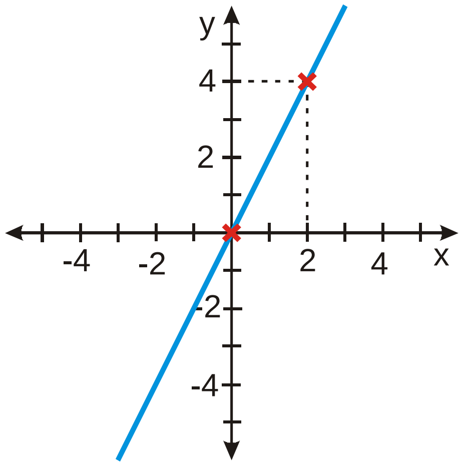


b) $y = -\pi \Rightarrow$ body $[0;-\pi]$, $[3;-\pi]$

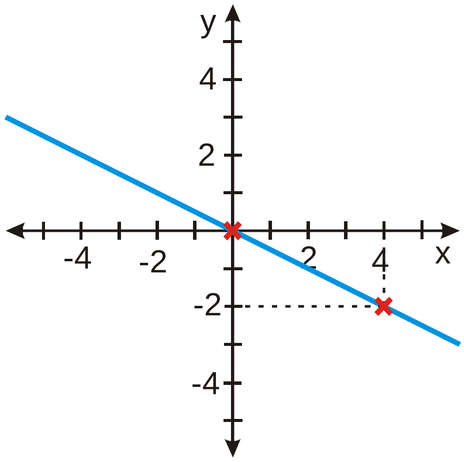


Obě předchozí funkce byly konstantní a oba grafy jsou rovnoběžné přímky.
Konstantní funkce = pro všechna x dostáváme stejné $y \Rightarrow$ všechny body grafu budou mít stejnou y-ovou souřadnici $\Rightarrow$ graf je vodorovná přímka.

c) $y = 2x \Rightarrow$ body $[0;0]$, $[2;4]$



d) $y = -0,5x \Rightarrow$ body $[0;0]$, $[4;-2]$



Obě předchozí funkce jsou přímé úměrnosti a oba grafy procházejí bodem $[0;0]$.
Přímá úměrnost: funkci můžeme zapsat ve tvaru $y = ax$, dosadíme $x = 0 \Rightarrow$ $y = ax = a \cdot 0 = 0 \Rightarrow$ graf prochází bodem $[0;0]$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad je sice strašně jednoduchý, ale zejména kreslení konstantních funkcí dělá studentům problémy. V předpisu jim schází informace o *x*, a tak graf funkce často kreslí jako jediný bod $[0;3]$, který vnímají jako vyjádření faktu, že $y = 3$ a necítí, že by měl něco společného s *x*. Snažím se jim vysvětlit, že i bod $[0;3]$ obsahuje *x* a neliší se od jiných bodů jako například $[1;3]$. Navíc zdůrazňuji, že funkce je vždy o přiřazování hodnot *y* k *x* a pokud její předpis *x* neobsahuje, znamená to pouze, že na hodnotě *x* nezáleží a všem *x* se přiřazuje stejné číslo, které je udané v předpisu (v našem případě 3).
Občas je také možné se setkat s tím, že studenti špatně počítají hodnoty u funkce bodu *c*). Z pro mě zatím neznámého důvodu získají „obrácené“ dvojice $[2;1]$, $[4;2]$. U takových je nutné chtít, aby doopravdy dosadili do funkčního předpisu.
Rozhodně patří mezi příklady, kde je nejnutnější, aby je studenti dělali sami a učitel tak mohl zjistit, jaké chyby dělají. Často se podaří odkrýt zásadní problémy.

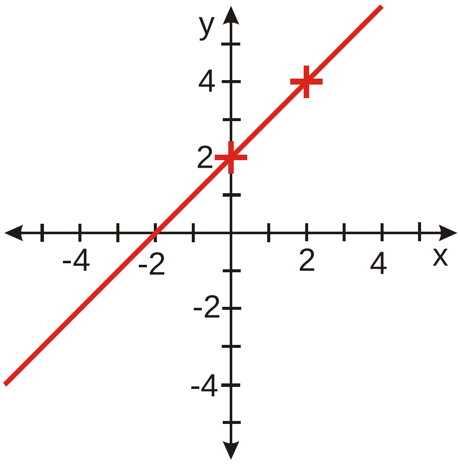
Pedagogická poznámka: U následujícího příkladu se mohou vyskytnout problémy s body $[0;2]$, kde někteří žáci nevědí, jak bod nakreslit (kvůli nule). Snažím se donutit žáky k tomu, aby si alespoň ze začátku psali dvojice bodů, podle kterých kreslí. Často si nepíší nic a mají v grafech strašný chaos.

Př. 6: Nakresli graf lineární funkce:
a) $y = x + 2$, b) $y = -2x + 4$, c) $y = 0,5x - 1$.

a) $y = x + 2$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x + 2 = 0 + 2 = 2 \Rightarrow$ bod $[0;2]$.

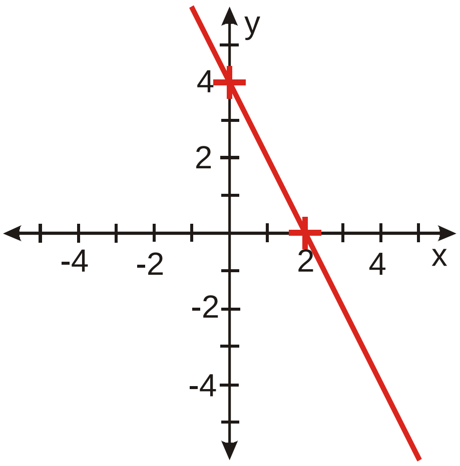
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = x + 2 = 2 + 2 = 4 \Rightarrow$ bod $[2;4]$.



b) $y = -2x + 4$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = -2x + 4 = -2 \cdot 0 + 4 = 4 \Rightarrow$ bod $[0;4]$.

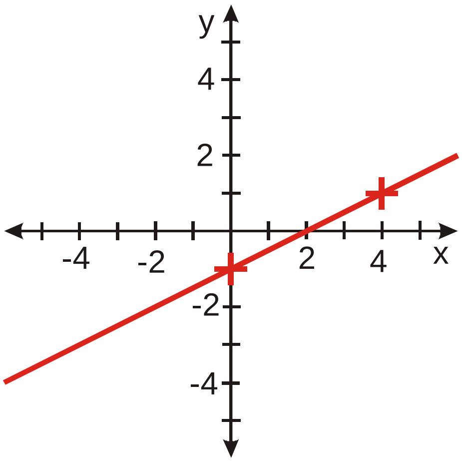
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = -2x + 4 = -2 \cdot 2 + 4 = 0 \Rightarrow$ bod $[2;0]$.



c) $y = 0,5x - 1$

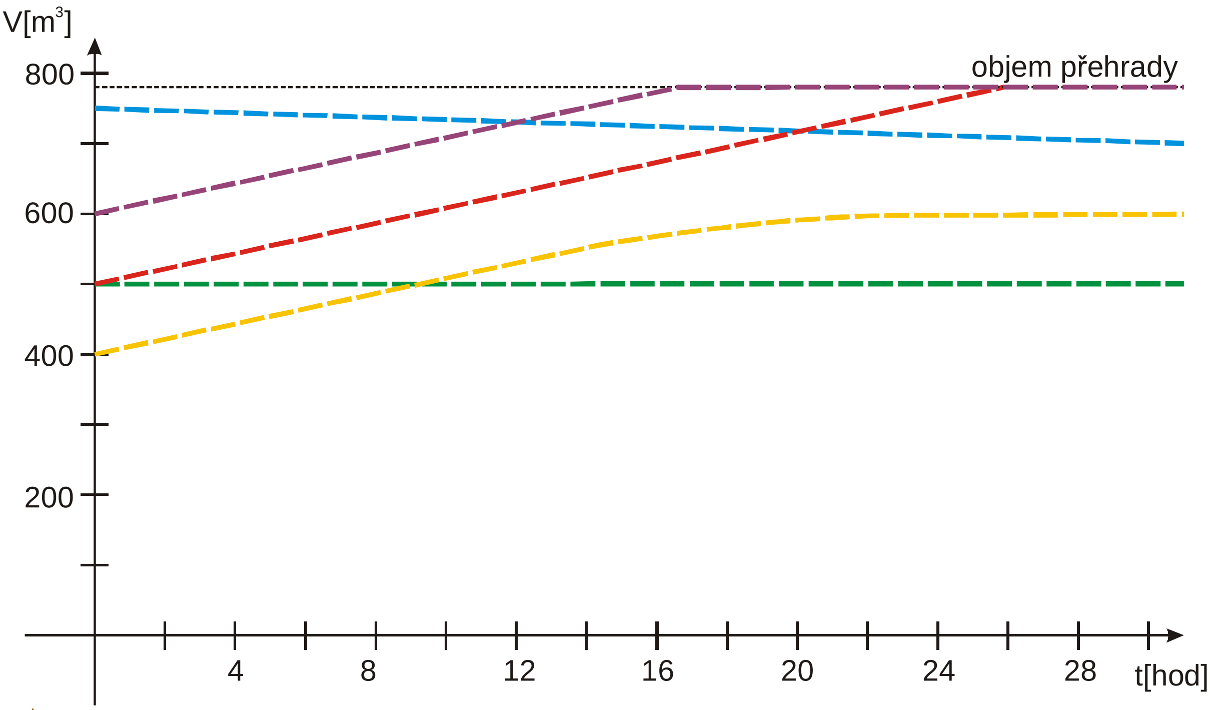
Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = 0,5x - 1 = 0,5 \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[0;-1]$.

Dosazujeme $x = 4 \Rightarrow y = 0,5x - 1 = 0,5 \cdot 4 - 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[4;1]$.



Pedagogická poznámka: Následující příklad považuji za docela přínosný, ale pokud má někdo velké problémy s předchozím příkladem, snažím se, aby alespoň jeden z bodů udělal tak samostatně, aby mohl doma sám vyřešit příklad 8. Třídu pak nechám přemýšlet nad následujícím příkladem, který si rychle zkontrolujeme před zvoněním.

Př. 7: Na obrázku je kromě původního zadání příkladu o Orlické přehradě (červená čára) nakresleno několik dalších závislostí objemu zadržované vody na čase. Popiš slovně, jak se objev vody v přehradě mění a urči počáteční objem vody v přehradě.
U závislostí, které můžeme považovat za lineární funkce, urči znaménko koeficientu *a*.



- **modrá čára:** počáteční objem vody v přehradě asi 750 mil m^3, množství vody v přehradě se plynule zmenšuje, odtok je větší než přítok, jde o lineární funkci, záporný koeficient *a*,
- **fialová čára:** počáteční objem vody v přehradě 600 mil m^3, množství vody se zvětšovalo stejně rychle jako v původním zadání, po naplnění přehrady se množství

vody nezvyšovalo, nejde o lineární funkci, ale bylo by možné funkci rozdělit na dvě lineární funkce,

- **zelená čára:** počáteční objem vody v přehradě 500 mil m^3 se nemění (přítok se rovná odtoku), jde o lineární konstantní funkci, koeficient *a* je nulový,
- **žlutá čára:** počáteční objem vody v přehradě 400 mil m^3 nejdříve roste jako v původním zadání, poté se přírůstek zmenšuje, až se objem vody ustálí, nejde o lineární funkci.

Pedagogická poznámka: Následující příklad není určen k probírání v hodině. Jde o domácí cvičení pro žáky, u kterých se objeví problémy s příkladem 6.

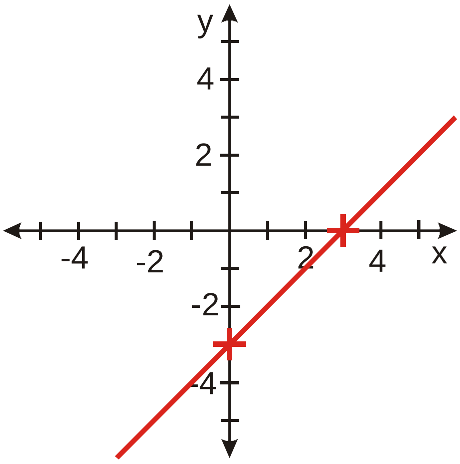
Př. 8: Nakresli graf lineární funkce:

a) $y = x - 3$, b) $y = \frac{3}{2}x - 1$, c) $y = -\frac{2}{3}x + 1$.

a) $y = x - 3$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = x - 3 = 0 - 3 = -3 \Rightarrow$ bod $[0;-3]$.

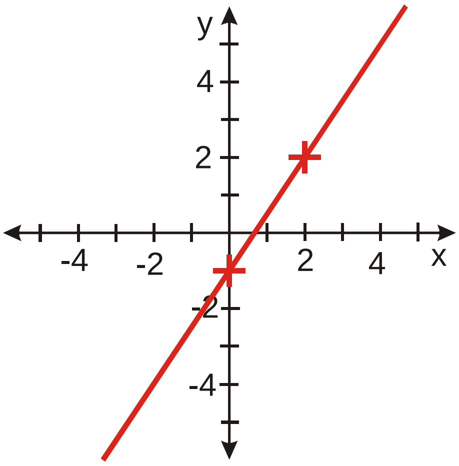
Dosazujeme $x = 3 \Rightarrow y = x - 3 = 3 - 3 = 0 \Rightarrow$ bod $[3;0]$.



b) $y = \frac{3}{2}x - 1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 = \frac{3}{2} \cdot 0 - 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[0;-1]$.

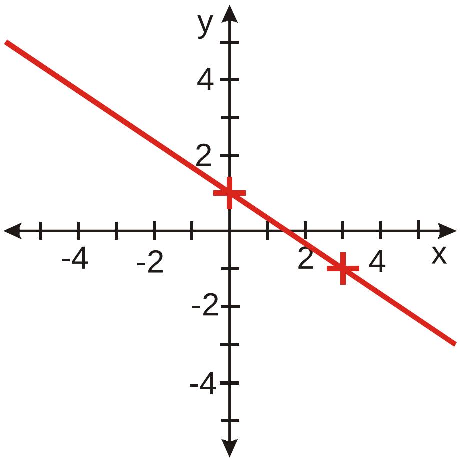
Dosazujeme $x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1 = \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 2 \Rightarrow$ bod $[2;2]$.



c) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

Dosazujeme $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{2}{3} \cdot 0 + 1 = 1 \Rightarrow$ bod $[0;1]$.

Dosazujeme $x = 3$ (kvůli zlomku v předpisu funkce) $\Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 1 = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 1 = -1 \Rightarrow$ bod $[3;-1]$.



Shrnutí: Grafem lineární funkce je přímka, kterou můžeme nakreslit pomocí dvou bodů.